



گزینهدو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

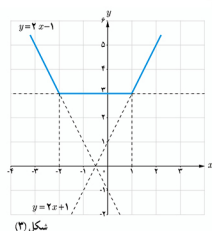
ویژه پایه یازدهم

آبان ۱۴۰۴

دفترچه پاسخ تشریحی

ارزشیابی تشریحی مرحله ۱

حسابان ۱ (رشته ریاضی و فیزیک)



۱۴۰۴-۱۴۰۵



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

مدیر پروژه ارزشیابی تشریحی: محمد حسین کشانی

معاون تولید محتوا: علی الفتی

طراحان

گروه ریاضی

مدیر پروژه: محمد امیررضا سید شاکری
معاون تولید محتوا: علی الفتی

حسابان و ریاضی پایه

مسئول درس: علیرضا فاطمی

• حسین شفیع زاده

• سید امیرمحمد سید شاکری

هندسه

مسئول درس: محمد تقی پور

• سعید اکبرزاده

• امیدرضا پورحسینی

ریاضیات گسسته

مسئول درس: حسین اسدزاده

• سعید اکبرزاده

• امیررضا پورحسینی

ریاضی تجربی

مسئول درس: امیرحسین شریفیان

• ایمان اردستانی

• محمد خان گلدی

ریاضی انسانی

مسئول درس: حسین اسدزاده

• سعید اکبرزاده

• امیدرضا پورحسینی

طراحان

گروه علوم

مدیر پروژه: محمد حسین کشانی
معاون تولید محتوا: علی الفتی

زیست شناسی

مسئول درس: علی جوهری

• منصوره رئیس دانا

• علی جوهری

فیزیک

مسئول درس: علی کنی

• احمد رضوانی

• یوسف صباغی

شیمی

مسئول درس: محمد وحیدی

• بابک اسفندی

• سبحان دقیق

زمین شناسی

مسئول درس: شکبیا کریمی

• حسن علی محمدی

مدیر پروژه ارزشیابی تشریحی: محمد حسین کشانی

معاون تولید محتوا: علی الفتی

طراحان

مدیر گروه: علی اکبر آخوندی

گروه
عمومی

ادبیات
فارسی

مسئول درس: محسن ابراهیم تهرانی

افشین محی الدین

دین و
زندگی

مسئول درس: زهرا محمدی

علی اکبر آخوندی

زهرا محمدی

زبان
انگلیسی

مسئول درس: سعید ابراهیمی

علی عاشوری

سعید ابراهیمی

علوم و
فنون ادبی

مسئول درس: فاطمه اکران

گلاویژ جلالی

مهرابه مجتهد

جامعه
شناسی

مسئول درس: الهام رضایی
دستیار: فاطمه صفری

فروغ تیموریان

آزیتا بیدقی

روان
شناسی

مسئولین درس: سیده ضحی سکاکی
و حسین اصفهانی

سیده ضحی سکاکی

زبان
عربی

مسئولین درس:
پویا رضاداد
مائده خدایاری
دستیار: سارا حمزه

عمار تاجبخش
جواهر فرحات

محسن احدی
کیارش پورمهدی

تاریخ

مسئول درس: الناز گنج کار
دستیار: الهه ریاحی نسب

مهسا اصغری

وجیهه صادقی

جغرافیا

مسئول درس: وجیهه صادقی

بهروز یحیی

مهسا اصغری

فلسفه
و منطق

مسئول درس: نگین تربتی

اکرم یاسری

فاطمه شریف زاده

مدیر گروه: علی اکبر آخوندی

گروه
انسانی

طراحان

الف) ۷۵ (۵/۰ نمره)

مجموع جملات دنباله حسابی a_n با قدرنسبت d و جمله اول a_1 برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

این دنباله یک دنباله حسابی با جمله اول ۶- و قدرنسبت ۳ است، داریم:

$$S_{10} = \frac{10}{2} (2 \times (-6) + 9 \times 3) = 5 \times (-12 + 27) = 5 \times 15 = 75$$

ب) $a^6 + a^3 + a^2 + a + 1$ (۵/۰ نمره)

نکته: به ازای تمام اعداد طبیعی n داریم:

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

ج) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ یا $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ به ازای $a \neq 0$ (۵/۰ نمره)

نکته: به طور کلی اگر α و β دو عدد دلخواه و $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ باشند، آنگاه α و β جوابهای معادله $x^2 - Sx + P = 0$ هستند.

مجموع ریشه‌ها برابر $2\sqrt{2}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر یک است، پس این معادله به صورت $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ یا $a(x^2 - 2\sqrt{2}x + 1) = 0$ ($a \neq 0$) است.

د) $f(x) = 3$ (۵/۰ نمره)

$$f(x) = -x + 1 + x + 2 = 3 \quad -2 \leq x \leq 1$$

در این محدوده $x - 1 < 0$ و $x + 2 > 0$ ، پس:

الف) نادرست (۵/۰ نمره)

نکته: در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها P باشد، این روابط برقرار است.

$$S = -\frac{b}{a}, \quad P = \frac{c}{a}$$

مجموع ریشه‌های معادله داده شده برابر است با:

$$-\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3$$

ب) نادرست (۵/۰ نمره)

نکته: جوابهای معادله $|f(x)| = |g(x)|$ همان جوابهای دو معادله $f(x) = g(x)$ و $f(x) = -g(x)$ هستند.

معادله $f(x) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$|x| - |x+1| = 0 \Rightarrow |x| = |x+1| \Rightarrow \begin{cases} x = x+1 \Rightarrow 0 = 1 \quad * \\ x = -x-1 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \quad \checkmark \end{cases}$$

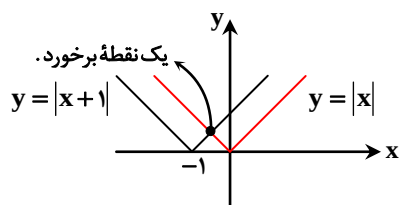
این معادله دارای یک ریشه است.

راه حل دوم:

$$|x| = |x+1| = 0 \Rightarrow |x| = |x+1|$$

معادله $f(x) = 0$ را حل می‌کنیم:

حالا دو تابع $y = |x|$ و $y = |x+1|$ را رسم می‌کنیم. تعداد نقاط برخورد دو تابع، تعداد ریشه‌های معادله را مشخص می‌کند.



ج) نادرست (۵/۰ نمره)

نکته: برای حل معادلات گنگ با به توان رساندن طرفین معادله (و در صورت لزوم تکرار این عمل) و ساده کردن به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم که آن را حل می‌کنیم، جوابهای به دست آمده باید در معادله اصلی آزمایش شوند، زیرا عملیات توان رسانی ممکن است جوابهای اضافی تولید کند.

$$\sqrt{x-1} = x \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x-1 = x^2 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

د) درست (۵/۰ نمره)

نکته: فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد، در این صورت اگر $|u| \geq a$ ، آنگاه $u \geq a$ یا $u \leq -a$.

الف) گزینه ۳ (۵/۰ نمره)

نکته: در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر جمع ریشه ها S و ضرب ریشه ها P باشد، این روابط برقرار است.

$$S = -\frac{b}{a}, \quad P = \frac{c}{a}$$

$$\frac{c}{a} = 2 \Rightarrow \frac{m}{3} = 2 \Rightarrow m = 6$$

ب) گزینه ۴ (۱ نمره)

نکته: اگر $x = a$ یک ریشه عبارت $P(x)$ باشد، سایر ریشه های عبارت (در صورت وجود) از تقسیم عبارت $P(x)$ بر $x - a$ به دست می آید. عبارت را بر $x - 1$ تقسیم می کنیم:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 4x + 4 & x - 1 \\ -(x^3 - x^2) & \\ \hline -4x + 4 & \\ -(-4x + 4) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

پس معادله به صورت $(x-1)(x^2-4) = 0$ است و داریم:

$$\begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases} \end{cases}$$

مجموع صفرهای دیگر برابر $2 + (-2) = 0$ است.

راه حل دوم:

با استفاده از دسته بندی و تجزیه عبارت، داریم:

$$x^2(x-1) - 4(x-1) = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2-4) = 0$$

و ادامه راه حل، مثل راه حل اول است.

ج) گزینه ۲ (۱ نمره)

نکته: برای حل معادلات شامل عبارات گویا، با ضرب طرفین معادله در کوچک ترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن عبارت جبری به دست آمده، معادله را حل می کنیم. جواب به دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند، زیرا کسر تعریف نشده می شود. همچنین ممکن است برخی از جواب ها با شرایط مسئله در محیط پیرامونی مطابقت نداشته باشند که این جواب ها نیز مورد قبول نیستند. معادله را با ضرب طرفین در مخرج مشترک حل می کنیم:

$$\frac{2x-1}{x+1} + \frac{2}{x-1} = 3 \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } (x+1)(x-1)} (2x-1)(x-1) + 2(x+1) = 3(x-1)(x+1)$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 + 2x + 2 = 3x^2 - 3 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \checkmark \\ x = 2 \checkmark \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول است.

راه حل اول:

نکته: مجموع جملات دنباله هندسی a_n با قدرنسبت q و جمله اول a_1 برابر است با:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

با توجه به دنباله می توان فهمید:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \quad (0/25) \\ q = 2 \quad (0/25) \end{cases}$$

حاصل مجموع ۷ جمله اول را به دست می آوریم:

$$S_7 = \frac{a_1(1-q^7)}{1-q} = \frac{3(1-2^7)}{1-2} = \frac{3(-127)}{-1} = 381 \quad (0/5)$$



-۵-

نکته: در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ می‌دانیم:

- اگر شاخه‌های سهمی رو به بالا باشد، $a > 0$ و اگر شاخه‌های سهمی رو به پایین باشد، $a < 0$.
 - اگر سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای با عرض مثبت قطع کند، $c > 0$ و اگر سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای با عرض منفی قطع کند، $c < 0$.
 - با توجه به علامت a و علامت طول رأس $(-\frac{b}{2a})$ می‌توان علامت b را از روی نمودار سهمی مشخص کرد.
- دهانه سهمی روبه بالاست، پس $a > 0$ از طرفی طول رأس سهمی منفی است، پس:

$$-\frac{b}{2a} < 0 \xrightarrow{a > 0} b > 0$$

محل برخورد سهمی با محور عرض‌ها عددی منفی است، پس $c < 0$ است و ریشه‌ها یکی منفی و یکی مثبت که مقدار عددی ریشه منفی از ریشه مثبت بزرگ‌تر است، پس مجموع ریشه‌ها منفی و حاصل ضرب ریشه‌ها نیز منفی است.

علامت حاصل ضرب ریشه‌ها	علامت مجموع ریشه‌ها	علامت c	علامت b	علامت a
منفی	منفی	منفی	مثبت	مثبت
(- / +)	(- / +)	(- / +)	(+ / +)	(+ / +)

-۶-

(الف)

راه حل اول:

نکته: برخی از معادلات را می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب، به یکی از انواع معادلاتی که می‌شناسیم تبدیل کرد و پس از حل آن و با رجوع به تغییر متغیر، مقادیر مجهول اصلی معادله اولیه را یافت.

به کمک تغییر متغیر $x = t^2 + 1$ معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$\underbrace{x^2 - x - 2 = 0}_{(0/5)} \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 = \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \quad (0/25) \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \quad (0/25) \end{cases}$$

ریشه‌های به دست آمده را برابر $t^2 + 1$ قرار داده و معادله را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} t^2 + 1 = 2 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1 \quad (0/5) \\ t^2 + 1 = -1 \Rightarrow t^2 = -2 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد} \quad (0/5) \end{cases}$$

راه حل دوم:

عبارت‌ها را با استفاده از اتحاد ساده‌تر می‌نویسیم:

$$(t^2 + 1)^2 - (t^2 + 1) - 2 = 0 \Rightarrow t^4 + 2t^2 + 1 - t^2 - 1 - 2 = 0 \Rightarrow t^4 + t^2 - 2 = 0$$

به کمک تغییر متغیر $x = t^2$ ، معادله را بازنویسی می‌کنیم.

$$\underbrace{x^2 + x - 2 = 0}_{(0/5)} \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \quad (0/25) \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \quad (0/25) \end{cases}$$

ریشه‌های به دست آمده را برابر t^2 قرار داده و جواب‌های معادله را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1 \quad (0/5) \\ t^2 = -2 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد} \quad (0/5) \end{cases}$$

راه حل سوم:

عبارت‌ها را با استفاده از اتحاد ساده‌تر می‌نویسیم:

$$(t^2 + 1)^2 - (t^2 + 1) - 2 = 0 \Rightarrow t^4 + 2t^2 + 1 - t^2 - 1 - 2 = 0 \Rightarrow t^4 + t^2 - 2 = 0 \quad (0/5)$$

حال عبارت را تجزیه کرده و ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم.

$$\underbrace{(t^2 - 1)(t^2 + 2) = 0}_{(0/5)} \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1 \quad (0/5) \\ t^2 + 2 = 0 \Rightarrow t^2 = -2 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد} \quad (0/5) \end{cases}$$

(ب)

راه حل اول:

نکته: برای حل معادلات شامل عبارات گویا، با ضرب طرفین معادله در کوچک ترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن عبارت جبری به دست آمده، معادله را حل می کنیم. جواب به دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند، زیرا کسر تعریف نشده می شود. همچنین ممکن است برخی از جواب ها با شرایط مسئله در محیط پیرامونی مطابقت نداشته باشند که این جواب ها نیز مورد قبول نیستند. طرفین تساوی را در مخرج مشترک یعنی $(2x+1)(x+2)$ ضرب می کنیم:

$$\overbrace{(2x+1)(x+2)}^{(0/25)} \times \left(\frac{x+1}{2x+1} - \frac{2x}{x+2} = 2 \right) \Rightarrow (x+1)(x+2) - (2x)(2x+1) = 2(2x+1)(x+2)$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 2 - 4x^2 - 2x = 4x^2 + 10x + 4 \Rightarrow 7x^2 + 9x + 2 = 0 \quad (0/5)$$

$$\Delta = 25 \Rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{25}}{14} = \begin{cases} x = \frac{-9+5}{14} = -\frac{4}{14} = -\frac{2}{7} \quad (0/5) \\ x = \frac{-9-5}{14} = -\frac{14}{14} = -1 \quad (0/5) \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول اند. $(0/25)$

راه حل دوم:

$$\frac{x+1}{2x+1} - \frac{2x}{x+2} = 2$$

مخرج مشترک می گیریم:

$$\frac{(x+1)(x+2) - 2x(2x+1)}{(2x+1)(x+2)} = 2 \quad (0/25)$$

با توجه به اینکه ریشه های عبارت نباید مخرج کسر را صفر کند، طرفین وسطین می کنیم:

$$(x+1)(x+2) - (2x)(2x+1) = 2(2x+1)(x+2) \Rightarrow x^2 + 3x + 2 - 4x^2 - 2x = 4x^2 + 10x + 4 \Rightarrow 7x^2 + 9x + 2 = 0 \quad (0/5)$$

$$\Delta = 25 \Rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{25}}{14} = \begin{cases} x = \frac{-9+5}{14} = -\frac{4}{14} = -\frac{2}{7} \quad (0/5) \\ x = \frac{-9-5}{14} = -\frac{14}{14} = -1 \quad (0/5) \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول اند. $(0/25)$

(ج)

نکته: برای حل معادلات گنگ با به توان رساندن طرفین معادله (و در صورت لزوم تکرار این عمل) و ساده کردن به معادله ای بدون رادیکال می رسیم که آن را حل می کنیم، جواب های به دست آمده باید در معادله اصلی آزمایش شوند، زیرا عملیات توان رسانی ممکن است جواب های اضافی تولید کند.

برای حل این معادله رادیکالی، کافی است طرفین تساوی را به توان ۲ برسانیم:

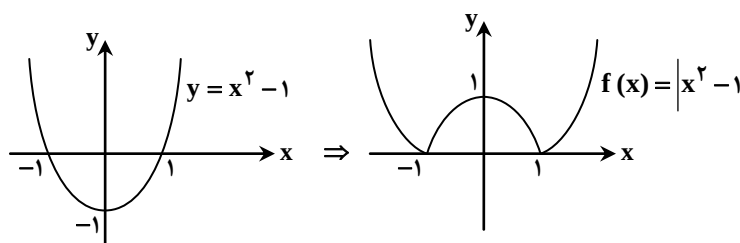
$$2\sqrt{x+1} = \sqrt{2x^2-2} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 4(x+1) = 2x^2-2 \Rightarrow 2x^2-4x-6=0 \quad (0/5)$$

$$\xrightarrow{\div 2} x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x-3)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \quad (0/5) \\ x=-1 \quad (0/5) \end{cases}$$

هر دو جواب در دامنه جواب معادله صدق می کند و قابل قبول است. $(0/5)$

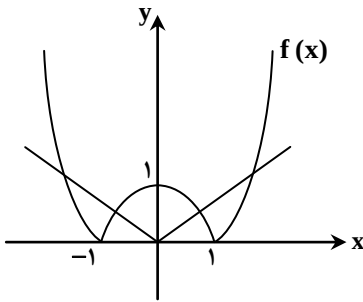
-۷

ابتدا نمودار $f(x) = |x^2 - 1|$ را رسم می کنیم. برای رسم این نمودار کافی است ابتدا تابع $y = x^2 - 1$ را رسم کرده، سپس قسمت هایی از نمودار را که در زیر محور طول ها قرار دارند را نسبت به محور طول ها قرینه کرده و قسمت های زیر محور طول را پاک کنیم:





حالا روی همین نمودار، نمودار تابع $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ را رسم می‌کنیم:



محل برخورد دو نمودار جواب‌های معادله است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، در چهار نقطه یکدیگر را قطع کرده‌اند.

رسم درست $f(x)$ ۰/۷۵ و مشخص کردن هرکدام از نقاط برخورد با محورهای مختصات ۰/۲۵ (۱/۵ نمره)

رسم درست $g(x)$ ۰/۵ (نمره)

مشخص کردن تعداد نقاط برخورد (۱ نمره)